JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN
ISSN : 1978-4422

ε PSILON

PROGRAM STUDI MATEMATIKA FMIPA UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT

ε	Vol. 1	No. 1	Hal. 1 - 48	Banjarbaru, Juni 2007	ISSN : 1978-4422

Volume 1 Nomor 1, Juni 2007

Daftar Isi

KRITERIA OSILASI DARI PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN ORDE SATU DENGAN SATU ARGUMEN TUNDAAN

Anita T. Kurniawati[1]

ABSTRACT

In general, a system are modeling by differential equation. The realistic model is better if presented by delay differential equation (dde). It is difficult to obtain the analytical solution of dde, therefore, we study the solution behavior of this system. One of the behavior of differential equations is oscillation. In this paper we study the oscillation criteria of dde, there is

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

where $p(t) > 0$ is a continuous function and τ is a positive constant.
We obtain the sufficient condition such that the oscillation occur in dde. Then we give example and its graphic with matlab.

Key words: delay differential equation (dde), oscillation, matlab.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial tundaan merupakan salah satu persamaan yang digunakan untuk memodelkan suatu sistem kehidupan. Berbeda dengan persamaan diferensial biasa yang biasanya tergantung hanya pada kondisi sekarang, persamaan diferensial tundaan tergantung dengan kondisi masa lalu. Berdasarkan kenyataannya, hal ini lebih realistik [2].

Persamaan diferensial tundaan ini banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang kehidupan, antara lain: dinamika populasi [4],dan predator prey [3]. Sebagaimana umumnya persamaan diferensial biasa, banyak penulis tertarik mempelajari perilakunya saja, antara lain yang akan dikaji dalam makalah ini adalah kriteria osilasi dari persamaan diferensial tundaan orde satu dengan satu argumen tundaan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial tundaan merupakan salah satu tipe persamaan diferensial fungsional [2]. Persamaan diferensial tundaan adalah persamaan diferensial yang derivatif tingkat tertinggi fungsi yang tidak diketahui tidak memuat tundaan.

Diberikan bilangan real $r \geq 0$, bilangan real $\mathbf{R}$ dan $\mathbf{C} = \mathbf{C}([-r,0], \mathbf{R})$. $\mathbf{C}$ adalah ruang bernorma dengan norma

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|, \text{ untuk } \phi \in \mathbf{C}.$$

1. Staf Pengajar Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya

Dapat ditunjukkan bahwa **C** adalah Ruang Banach.
Persamaan diferensial tundaan dapat ditulis:

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

dengan fungsi kontinu f: $\Omega \subseteq$ **R**x**C**→**R** dan $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ dengan $-r \le \theta \le 0$. []
Persamaan (1) mempunyai penyelesaian jika fungsi $f(t, x_t)$ kontinu [2]. Serta penyelesaian dari (1) bernilai tunggal jika memenuhi kondisi Lipschitz. [2].

Penyelesaian Berosilasi

Apabila penyelesaian suatu persamaan diferensial sulit diperoleh, maka tindakan yang bisa dilakukan adalah dengan mengamati sifat-sifat (perilaku) dari penyelesaian tersebut. Dalam makalah ini akan dibahas salah satu sifat penyelesaian tersebut, yaitu penyelesaian berosilasi.

Suatu fungsi (real) pada suatu interval $[t_0, \infty)$ dikatakan berosilasi jika terdapat barisan bilangan real $\{t_m\} \to \infty$, untuk $m \to \infty$ sedemikian sehingga $t_m \in [t_0, \infty)$ dan $x(t_m) = 0$, m=1,2,3,.... **[5]**.

Selain itu definisi osilasi yang lain diberikan sebagai berikut :

Definisi 1 [5]

Suatu fungsi real terdeferensial x pada $[t_0, \infty)$ dikatakan berosilasi pada $[t_0, \infty)$ jika terdapat barisan $\{t_m\} \to \infty$, untuk $m \to \infty$ sedemikian sehingga $t_m \in [t_0, \infty)$ dan $x(t_m)x'(t_m) = 0$, m=1,2,3,....
Suatu fungsi real terdeferensial x pada $[t_0, \infty)$ dikatakan tidak berosilasi pada $[t_0, \infty)$ jika terdapat $t_1 \ge t_0$ sehingga $x(t_m)x'(t_m) \ne 0$ untuk $t_1 \ge t_0$.

Berikut ini diberikan beberapa lemma yang mendukung penyelesaian berosilasi.

Lemma 2 [5]

Jika diasumsikan bahwa untuk beberapa i, $\limsup_{t \to \infty} \int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds > 0$ (2)

dan $x(t)$ adalah penyelesaian *eventually* positif dari persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0, \ t \ge t_0 \tag{3}$$

maka

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{x(t-\tau_i)}{x(t)} < \infty .$$

Lemma 3 [1]

Jika persamaan (2) mempunyai penyelesaian *eventually* positif maka

$$\int_{t}^{t+\tau_i} R_i(s)ds \leq 1, i = 1,\ldots,n \tag{4}$$

eventually.

Kriteria Penyelesaian Berosilasi

Diberikan persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \tag{5}$$

dengan fungsi kontinu $p(t) \geq 0$ dan konstanta $\tau > 0$.
Persamaan (5) dapat ditulis $x'(t) = f(t,x)$ dengan f : $\Omega \subseteq$ **RxC→R** dan $f(t,x) = -p(t)x(t-\tau)$. Karena $f(t,x)$ kontinu maka persamaan diferensial (5) mempunyai penyelesaian. Karena memenuhi kondisi Lipschitz terhadap x, maka penyelesaian tersebut tunggal. Selanjutnya, kriteria osilasi dari (5) akan diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 4

Jika diberikan $\int_{t}^{t+\tau} p(s)\, ds > 0$ untuk $t \geq t_0$ dan beberapa $t_0 > 0$ serta

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t) \ln\left(e \int_{t}^{t+\tau} p(s)\, ds \right) dt = \infty \tag{6}$$

maka setiap penyelesaian dari persamaan (5) berosilasi.
Bukti:
Diandaikan terdapat penyelesaian tak berosilasi $x(t)$, yaitu terdapat $t_1 > t_0$ dengan $t_1 - \tau \geq t_0$ sedemikian sehingga $x(t)>0$ atau $x(t)<0$ untuk $t \geq t_1$. Tanpa mengurangi umumnya bukti, diasumsikan $x(t)$ adalah penyelesaian yang *eventually* positif.
Dari (5) didapat: $x'(t) = -p(t)x(t-\tau)$. Karena $p(t)>0$ dan $x(t-\tau)>0$ maka $x'(t)<0$ yang berarti $x(t)$ merupakan fungsi monoton turun *eventually.*
Untuk mendapatkan penyelesaian dan persamaan karakteristik dari (5) sulit diperoleh, sehingga didekati dengan memisalkan

$$\lambda(t) = \frac{-x'(t)}{x(t)}. \tag{7}$$

Untuk t yang sangat besar didapat bahwa fungsi $\lambda(t)$ merupakan fungsi tak negatif dan kontinu. Persamaan (7) merupakan persamaan diferensial biasa, didapat penyelesaiannya adalah: $x(t) = x(t_1)\exp\left(-\int_{t_1}^{t} \lambda(s)ds \right)$, dengan $x(t_1) > 0$ untuk beberapa $t_1 \geq 0$.
Selanjutnya, $\lambda(t)$ memenuhi bentuk umum persamaan karakteristik

$$\lambda(t) = p(t)\exp\left(\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right). \tag{8}$$

Untuk r>0, dapat ditunjukkan bahwa $e^{rx} \geq x + \dfrac{\ln(er)}{r}$. (9)

Didefinisikan $A(t) = \int_{t}^{t+\tau} p(s)\ ds$, sehingga (8) menjadi:

$$\lambda(t) = p(t)\exp\left(A(t).\frac{1}{A(t)}\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\ ds\right). \tag{10}$$

Berdasarkan (9), persamaan (10) menjadi

$$\lambda(t) \geq p(t)\left[\frac{1}{A(t)}\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)}\right]$$

Jika dikalikan dengan $A(t)$ didapat

$$\lambda(t)A(t) \geq p(t)\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds + p(t)\ln(eA(t)) \tag{11}$$

Dari definisi $A(t) = \int_{t}^{t+\tau} p(s)\ ds$, maka (11) menjadi

$$\lambda(t)\int_{t}^{t+\tau}p(s)\,ds - p(t)\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds \geq p(t)\ln\left(e\int_{t}^{t+\tau}p(s)\,ds\right)$$

Jika diintegralkan dari t = T sampai t = N, didapat

$$\int_{T}^{N}\left[\lambda(t)\int_{t}^{t+\tau}p(s)\,ds\right]dt - \int_{T}^{N}\left[p(t)\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right]dt \geq \int_{T}^{N}\left[p(t)\ln\left(e\int_{t}^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt \tag{12}$$

Dengan mengubah orde dari integrasi didapat

$$\begin{aligned}\int_{T}^{N}p(t)\left(\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right)dt &\geq \int_{T}^{N-\tau}\left(\int_{s}^{s+\tau}p(t)\lambda(s)\,dt\right)ds \\ &= \int_{T}^{N}\lambda(s)\left(\int_{s}^{s+\tau}p(t)dt\right)ds \\ &= \int_{T}^{N-\tau}\lambda(t)\left(\int_{t}^{t+\tau}p(s)ds\right)dt\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\int_T^N p(t)\left(\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right)dt \geq \int_T^{N-\tau}\lambda(t)\left(\int_s^{s+\tau}p(s)\,ds\right)dt \tag{13}$$

Dari (12) dan (13), didapat

$$\int_T^N\left[\lambda(t)\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right]dt - \int_t^{N-\tau}\left[\lambda(t)\int_{t-\tau}^{t}p(s)\,ds\right]dt \geq \int_T^N\left[p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt$$

Jika ruas kiri disederhanakan, maka didapat

$$\int_{N-\tau}^{N}\left[\lambda(t)\int_{t-\tau}^{t}p(s)\,ds\right]dt \geq \int_T^N\left[p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt. \tag{14}$$

Berdasarkan Lemma 3, dari (14) dan (4) didapat

$$\int_{N-\tau}^{N}\lambda(t)dt \geq \int_T^N\left[p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt. \tag{15}$$

Ruas kiri dari (14) dikerjakan tersendiri didapat,

$$\int_{N-\tau}^{N}\lambda(t)dt = \int_{N-\tau}^{N}\frac{-x'(t)}{x(t)}dt = \ln\frac{x(N-\tau)}{x(N)}. \tag{16}$$

Dari (15) dan (16) didapat

$$\ln\frac{x(N-\tau)}{x(N)} \geq \int_T^N\left[p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt.$$

Untuk $N\to\infty$, didapat

$$\lim_{N\to\infty}\ln\frac{x(N-\tau)}{x(N)} \geq \int_T^\infty\left[p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau}p(s)\,ds\right)\right]dt. \tag{17}$$

Sehingga berdasarkan (6) mengakibatkan

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t-\tau)}{x(t)} = \infty. \tag{18}$$

Dilain pihak, (6) berakibat terdapat barisan $\{t_n\}$ dengan $t_n\to\infty$ untuk $n\to\infty$ sedemikian sehingga $\int_{t_n}^{t_n+\tau}p(s)\,ds \geq \frac{1}{e}$, untuk semua n. Hal ini menunjukkan bahwa $\limsup_{t_n\to\infty}\int_{t_n}^{t_n+\tau}p(s)ds > 0$. Sehingga berdasarkan Lemma 1, didapat

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t-\tau)}{x(t)} < \infty .$$

Hal ini kontradiksi dengan (18), yang berarti pengandaian salah.

Contoh :

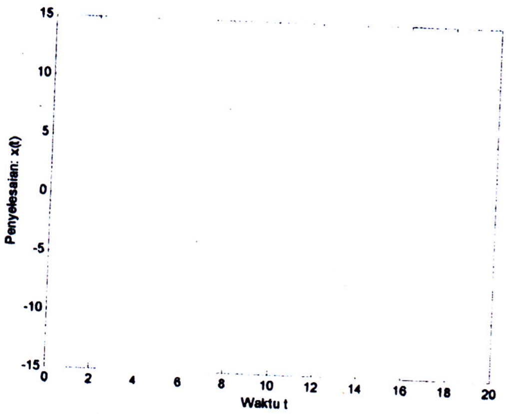
Diberikan persamaan diferensial tundaan sebagai berikut:

$$x'(t) + \frac{2t}{t+1} x(t-1) = 0 . \tag{19}$$

Karena $\int_t^{t+1} \frac{2s}{s+1}\, ds = 2 + 2\ln\frac{t+1}{t+2} > 0$ untuk $t \geq 1$ dan

$$\int_1^\infty \frac{2t}{t+1} \ln\left(e \int_t^{t+1} \frac{2s}{s+1} ds \right) dt \geq \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{2t}{t+1} dt = \lim_{n\to\infty}\left[2n - 2 + 2\ln\frac{1}{n+1} \right] = \infty ,$$ maka setiap penyelesaian dari (19) berosilasi.

Dengan bantuan matlab dapat dilihat grafik penyelesaian dari (19), dengan mengambil nilai awal (*history*) = 3.



Gambar 1. Grafik penyelesaian dari (19)

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian diatas dapat disinpulkan bahwa syarat cukup agar setiap penyelesaian dari persamaan diferensial tundaan (5) berosilasi adalah $\int_{t_0}^{\infty} p(t) \ln\left(e \int_t^{t+\tau} p(s)\, ds \right) dt = \infty$ dengan $\int_t^{t+\tau} p(s)\, ds > 0$ untuk $t \geq t_0$ dan beberapa $t_0 > 0$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Gyori I. dan Ladas G. (1991), *Oscillation Theory of Delay Differential Equations With Applications*, Clarendon Press, Oxford.

[2]. Hale JK. dan Verduyn Lunel SM. (1993), *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer Verlag, New York.

[3]. Jumani H. (2007), *Penggunaan Persamaan Diferensial Tundaan pada Interaksi Populasi*, Tesis M.Si., jurusan Matematika ITS, Surabaya.

[4]. Kuang,Y. (1993), *Delay Differential with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston.

[5]. Kurniawati, AT (2007), "*Kriteria Osilasi dari Penyelesaian Persamaan Diferensial Tundaan Non Autonomous Orde Satu*", Tesis M.Si, Matematika, ITS, Surabaya.

[6]. Qian, C. dan Ladas, G. (1990), "Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients", *Canad. Math. Bull.*, No. 33, hal. 442-451.

[7]. Stavroulakis, I.P. (2005), "Oscillation criteria for functional Differential Equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, Canada, hal. 171-180.