ISBN : 978 - 979 - 028 -019 - 9

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Tema :

Inovasi Penelitian Matematika dan pembelajarannya di Era Persaingan Global

Surabaya, 8-9 Juni 2007

Diselenggarakan oleh :

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Surabaya

Diterbitkan oleh :

Unesa University Press

DAFTAR ISI

Matematika

KRITERIA OSILASI PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN TINGKAT SATU DENGAN DUA ARGUMEN TUNDAAN

Anita T.Kurniawati
IGNR Usadha

ABSTRAK

Diberikan persamaan diferensial tundaan tingkat satu dengan dua argumen tundaan yang berbentuk:

$$x'(t) + P(t)x(t-\sigma) - Q(t)x(t-\tau) = 0$$

dengan $P(t), Q(t) \in C([t_0,\infty),\Re^+)$ dan σ, τ adalah konstanta tak negatif. Dicari syarat cukup sehingga setiap penyelesaian dari persamaan tersebut berosilasi.

Kata kunci: Persamaan diferensial tundaan, osilasi.

1. Pendahuluan

Pada umumnya suatu sistem dimodelkan secara matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Dalam persamaan diferensial hanya ditentukan oleh keadaan sekarang. Padahal dalam kenyataannya suatu model lebih realistik harus meliputi keadaan sistem pada masa lalu. Misalnya saja pada interaksi populasi[4]. Persamaan diferensial seperti itu dinamakan persamaan diferensial fungsional. Persamaan diferensial fungsional yang paling sederhana adalah persamaan diferensial tundaan atau *retarded*.[3]

Penyelesaian dari persamaan diferensial kadang sulit diperoleh, sehingga dipelajari perilaku atau sifatnya, antara lain osilasi yang akan dibahas dalam makalah ini.

2. Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial fungsional ada dua tipe yaitu persamaan diferensial fungsional tipe *retarded* yang di beberapa literatur disebut *delay differential equations* (persamaan diferensial tundaan) dan tipe *neutral*. Persamaan diferensial tundaan adalah persamaan diferensial yang derivatif tingkat tertinggi fungsi yang tidak diketahui tidak memuat tundaan.

Diberikan bilangan real $r \geq 0$ dan $C = C([-r,0],\Re)$. C adalah ruang bernorma dengan norma

$$\|\phi\| = \sup_{-r\le\theta\le 0} |\phi(\theta)|, \qquad \text{untuk } \phi \in C.$$

Dapat ditunjukkan bahwa C adalah Ruang Banach.

3. Penyelesaian Berosilasi

Apabila dalam suatu sistem dinamik, penyelesaian suatu persamaan diferensial sulit diperoleh, maka tindakan yang bisa dilakukan adalah dengan mengamati sifat-sifat (perilaku) dari penyelesaian tersebut. Dalam makalah ini akan dibahas salah satu sifat penyelesaian tersebut, yaitu penyelesaian berosilasi.

Suatu fungsi (real) pada suatu interval $[t_0, \infty)$ dikatakan berosilasi jika terdapat barisan bilangan real $\{t_m\} \to \infty$, untuk $m \to \infty$ sedemikian sehingga $t_m \in [t_0,\infty)$ dan $x(t_m) = 0$, m=1,2,3,....[5]

Berikut ini diberikan beberapa lemma yang digunakan dalam mendapatkan kriteria osilasi dari persamaan diferensial tundaan yaitu:

Lemma 3.2

Diasumsikan bahwa $P_i \in C[[t_0,\infty],\Re^+]$ dan $\tau_i \in C[[t_0,\infty],\Re^+]$ untuk $i = 1,\dots,n$. Suatu pertidaksamaan:

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} P_i(t)x(t-\tau_i(t)) \le 0,\ t \ge t_0$$

mempunyai penyelesaian *eventually* positif jika dan hanya jika persamaan:

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} P_i(t)y(t-\tau_i(t)) = 0,\ t \ge t_0$$

mempunyai penyelesaian *eventually* positif. [2]

Lemma 3.3

Jika diasumsikan bahwa untuk beberapa i,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+\tau i} R_i(s)ds > 0 \qquad (1)$$

dan $x(t)$ adalah penyelesaian *eventually* positif dari persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} R_i(t)x(t-\tau_i) = 0,\ t \ge t_0 \qquad (2)$$

maka

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t-\tau_i)}{x(t)} < \infty . \text{ [5]}$$

Lemma 3.4

Jika persamaan (2) mempunyai penyelesaian *eventually* positif maka

$$\int_t^{t+\tau_i} R_i(s)ds < 1, i = 1,\dots,n$$

eventually.[5]

4. Kriteria Penyelesaian Berosilasi

Diberikan persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t)+P(t)x(t-\sigma)-Q(t)x(t-\tau) = 0 \qquad (3)$$

dengan $P(t), Q(t) \in C([t_0,\infty),\Re^+)$ dan $\sigma, \tau \in [0,\infty)$.
Persamaan (3) dapat ditulis:

$$x'(t) = f(t,x)$$

dengan $f: \Omega \subseteq \Re \times C \to \Re$ dan $f(t,x) = -P(t)x(t-\sigma)+Q(t)x(t-\tau)$. Karena $f(t,x)$ kontinu maka persamaan diferensial (3) mempunyai penyelesaian. Karena persamaan (3) memenuhi kondisi Lipschitz terhadap x, maka penyelesaian tersebut tunggal. Selanjutnya, kriteria osilasi dari persamaan (3) akan diberikan oleh Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Teorema 4.1

Jika diasumsikan bahwa:

(H1) $P,Q \in C\ ([t_0,\infty),\Re^+)$, $\sigma,\tau \in [0,\infty)$ dan $\tau \le \sigma$

(H2) $P(t) \ge Q(t+\tau-\sigma)$ untuk $t \ge t_0+\sigma-\tau$

(H3) $\int_{-\sigma}^{-\tau} Q(s)ds \le 1$ untuk $t \ge t_0+\sigma$

dan misalkan $x(t)$ adalah penyelesaian dari (3) yang *eventually* positif serta dibentuk:

$$z(t) = x(t) - \int_{-\sigma}^{-\tau} Q(s+\tau)x(s)ds,\ t \ge t_0+\sigma-\tau \qquad (4)$$

maka $z(t)$ adalah fungsi positif yang tak naik (*non increasing*) dan memenuhi pertidaksamaan:

$$z'(t) + [P(t) - Q(t+\tau-\sigma)]z(t-\sigma) \le 0. \qquad (5)$$

Bukti:

Diasumsikan bahwa $t_1 \ge t_0+\sigma$ sedemikian sehingga $x(t)$ bernilai positif untuk $t\ \ge t_1-\tau$. Persamaan (4) diturunkan menghasilkan:

$$z'(t) = x'(t) - Q(t)x(t-\tau) + Q(t-\sigma+\tau)x(t-\sigma) \qquad (6)$$

Selanjutnya persamaan (3) disubstitusi ke persamaan (6) , menjadi:

$$z'(t) = [-P(t) + Q(t-\sigma+\tau]x(t-\sigma) \qquad (7)$$

Berdasarkan (H2) dan $x(t-\sigma) > 0$, maka $z'(t) \le 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $z(t)$ adalah yang tak naik (*non increasing*). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $z(t)$ adalah fungsi positif . Dari persamaan (7) diintegralkan dari $t-\sigma$ sampai t, sehingga didapat:

$$z(t) - z(t-\sigma) = -\int_{t-\sigma}^{t} [P(t) - Q(t-\sigma+\tau]\ x(t-\sigma)ds$$

Mengingat (H2) dan $x(t)$>0 diperoleh $\lim_{t\to\infty}(z(t) - z(t-\sigma)) \ne 0$, yang berarti $z(t)\ne 0$, untuk $t\ \ge t_1-\tau$. Jadi $z(t)>0$, untuk $t\ \ge t_1-\tau$.

Sedangkan dari persamaan (4) mengakibatkan $z(t) < x(t)$ sehingga $z(t-\sigma) < x(t-\sigma)$. Selanjutnya diperoleh

$$z'(t) + [P(t) - Q(t+\tau-\sigma)]z(t-\sigma) \le 0. \qquad \square$$

Teorema 4.2

Jika diasumsikan bahwa (H1),(H2),(H3) dari **Teorema 4.1** terpenuhi dan $R(t) = P(t) - Q(t+\tau-\sigma)$, serta diasumsikan

(H4) $\int^{t+\sigma} R(s)ds > 0$ untuk $t \ge t_0$ dan beberapa $t_0 > 0$

(H5) $\int_0^{\infty} R(t)\ln\left(e\int^{t+\sigma} R(s)ds\right)dt = \infty$

maka setiap penyelesaian dari persamaan (3) berosilasi.

Bukti:

Diandaikan terdapat penyelesian tak berosilasi $x(t)$, yaitu terdapat $t_1 > t_0$ dengan $t_1-\sigma+\tau \ge t_0$ sedemikian sehingga $x(t)$ >0 atau $x(t)$<0 untuk $t \ge t_1$. Tanpa mengurangi umumnya bukti, diasumsikan $x(t)$ adalah penyelesaian yang *eventually* positif, sehingga berdasarkan **Teorema 4.1** $z(t)$ adalah fungsi positif tak naik (*non increasing*) dan memenuhi

$$z'(t) + [P(t) - Q(t+\tau-\sigma)]z(t-\sigma) \le 0.$$

Berdasarkan **Lemma 3.2**, persamaan $y'(t) + [P(t) - Q(t+\tau-\sigma)]y(t-\sigma) = 0$ mempunyai penyelesaian yang *eventually* positif.

Misalkan $\lambda(t) = \dfrac{-y'(t)}{y(t)}$. Karena $y(t)$ *eventually positif* dan $y'(t) = -[P(t) - Q(t-\tau-\sigma)]y(t-\sigma) \le 0$ maka $\lambda(t)$ bernilai tak negatif (*non negative*) dan kontinu, sehingga jika terdapat $t_1 \ge t_0$ maka $y(t_1)>0$ dan $y(t) = y(t_1)e^{-\int_{t_1}^{t} \lambda(s)ds}$.

Jika $\lambda(t)$ juga memenuhi bentuk umum dari persamaan karakteristik, maka:

$$\lambda(t) = R(t)\, e^{\int_{t-\sigma}^{t} \lambda(s)ds} \qquad (8)$$

dengan $R(t) = P(t) - Q(t+\tau-\sigma)$.

Untuk $r>0$, maka $e^{rx} \ge x + \dfrac{\ln(er)}{r}$. $\qquad (9)$

Didefinisikan $A(t) = \int^{+\sigma} R(s)\, ds$, sehingga persamaan (8) menjadi:

$$\lambda(t) = R(t)\, e^{A(t)\,\frac{1}{A(t)}\int_{t-\sigma}^{t} \lambda(s)ds}. \qquad (10)$$

Berdasarkan (9), maka persamaan (10) menjadi:

$$\lambda(t) \ge R(t)\left[\frac{1}{A(t)}\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds + \frac{\ln eA(t)}{A(t)}\right] \qquad (11)$$

Pertidaksamaan (11) dikalikan dengan $A(t)$, sehingga menjadi

$$A(t)\lambda(t) \ge R(t)\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds + R(t)\ln eA(t) \qquad (12)$$

Karena $A(t) = \int^{+\sigma} R(s)\, ds$, maka persamaan (12) menjadi

$$\lambda(t)\int^{+\sigma} R(s)\,ds - R(t)\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds \ge R(t)\ln\left(e\int^{+\sigma} R(s)\,ds\right) \qquad (13)$$

Jika diintegralkan dari T sampai dengan N menjadi

$$\int_T^N \lambda(t)\left[\int^{+\sigma} R(s)\,ds\right]dt - \int_T^N R(t)\left[\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds\right]dt \ge \int_T^N R(t)\left[\ln\left(e\int^{+\sigma} R(s)\,ds\right)\right]dt \quad 14$$

Dengan mengubah batas integrasi, maka

$$\begin{aligned}\int_T^N R(t)\left[\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds\right]dt &\ge \int^{N-\sigma}\left[\int^{+\sigma} R(t)\lambda(s)\,dt\right]ds \\ &= \int^{N-\sigma} \lambda(s)\left[\int^{+\sigma} R(t)\,dt\right]ds \\ &= \int^{N-\sigma} \lambda(t)\left[\int^{+\sigma} R(s)\,ds\right]dt.\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\int_T^N R(t)\left[\int_{-\sigma} \lambda(s)\,ds\right]dt \ge \int^{N-\sigma} \lambda(t)\left[\int^{+\sigma} R(s)\,ds\right]dt \qquad (15)$$

Dari persamaan (14) dan (15) didapat:

$$\int_{N-\sigma}^{N} \lambda(t)\left[\int_{t}^{t+\sigma} R(s)\,ds\right]dt \geq \int_{t}^{N} R(t)\left[\ln\left(e\int_{t}^{t+\sigma} R(s)\,ds\right)\right]dt. \qquad (16)$$

Karena berdasarkan **Lemma 3.4** diketahui bahwa $\int_{t}^{t+\sigma} R(s)ds < 1$ *eventually*, maka persamaan (16) menjadi:

$$\int_{N-\sigma}^{N} \lambda(t)\,dt \geq \int_{t}^{N} R(t)\left[\ln\left(e\int_{t}^{t+\sigma} R(s)\,ds\right)\right]dt \qquad (17)$$

Ruas kiri dari pertidaksamaan (17) jika diselesaikan menjadi

$$\int_{N-\sigma}^{N} \frac{-y'(t)}{y(t)} = \ln\frac{y(N-\sigma)}{y(N)}dt \qquad (18)$$

Untuk $N \to \infty$, pertidaksamaan (18) menjadi

$$\lim_{t\to\infty} \ln\frac{y(t-\sigma)}{y(t)} = \infty.$$

Hal ini kontradiksi dengan **Lemma 3.3**, yang berarti pengandaian salah. Jadi disimpulkan bahwa setiap penyelesaian (1) berosilasi. □

Contoh:

Diberikan persamaan

$$x'(t) + P(t)x(t-1) - Q(t)x(t-1) = 0, \qquad (19)$$

dengan $P(t) = \frac{1}{e}$, $Q(t) = -\frac{1}{et}$, sehingga $R(t) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ dan

$$\int_{t}^{t+1} \frac{1}{e}\left[1 + \frac{1}{s}\right]ds = \frac{1}{e}[s + \ln s]\Big|_{t}^{t+1} = \frac{1}{e}\left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] > 0, \text{ untuk } t \geq 0.$$

Selanjutnya,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{e}\left[1 + \frac{1}{t}\right]\ln\left[e\int_{t}^{t+1} \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{s}\right)ds\right]dt = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e}\int_{t_0}^{\infty}\left[1 + \frac{1}{t}\right]\ln\left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]dt$$

$$\geq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e}\int_{t_0}^{\infty}\ln\left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]dt = \infty, \ t_0 > 0.$$

Berarti asumsi **Teorema 4.2** dipenuhi. Dengan demikian setiap penyelesaian dari (19) berosilasi.

5. Kesimpulan

Berdasarkan uraian diatas, syarat cukup supaya setiap penyelesaian berosilasi dari persamaan diferensial tundaan (1) adalah $\int_{0}^{\infty} R(t)\ln\left(e\int_{t}^{t+\sigma} R(s)ds\right)dt = \infty$, dengan $R(t) = P(t) - Q(t + \tau - \sigma)$ serta harus memenuhi asumsi (H1), (H2), (H3), dan (H4).

DAFTAR PUSTAKA

Belman R. dan Cooke KL.(1963).*Differential Difference Equations*.Academic Press.

Gyori I. dsn Ladas G.(1991).*Oscillation Theory of Delay Differential Equations With Applications*. Clarendon Press. Oxford.

Hale JK. Dan Verduyn Lunel SM.(1993).*Introduction to Functional Differential Equations*.Springer Verlag.New York.

Jumani.H.(2007).Penggunaan Persamaan Diferensial Tundaan pada interaksi populasi.tesis.jurusan Matematika ITS.

Li B.(1996).*Oscillation of first order Delay Differential Equations*.Proc AMER Math Sco.Vol 124.pp 3729-3737.

Usadha.IGNR.(2000).*Persamaan Diferensial Osilasi dengan Koefisien Fungsi Periodik*.Prosiding Seminar Nasional Matematika.ITS.Surabaya.