

ISBN : 978 - 979 - 028 -019 - 9

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Tema :

**Inovasi Penelitian Matematika dan
pembelajarannya di Era Persaingan Global**

Surabaya, 8-9 Juni 2007

Diselenggarakan oleh :

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Surabaya**



Diterbitkan oleh :

Unesa University Press

DAFTAR ISI

Kata Pengantar		iii
Daftar Isi		iv
Pemakalah Utama		
Hendra Gunawan	An Interpolasi Method That Minimizes an Energy Functional	1
Yansen Marpaung	Konstruktivisme	9
Muchlas Samani	Pendidikan Profesi dan Sertifikasi Guru	25
I Ketut Budayasa	Aplikasi Teori Graph dalam Perlokasian, Komunikasi dan Transportasi	30
Siti M. Amin	Multiple Intelligences	31
Agung Lukito	Kode dan Gelanggang Galois	38
Pendidikan Matematika		
Adi Asmara	Kecerdasan Emosional Dalam Pembelajaran Matematika	43
Alfia Rachmawati, Asma Johan	Penerapan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Numbered Head Together (NHT) Dengan Menggunakan Alat Peraga Pada Materi Pokok Simetri Di Kelas V SDN Penjaringanasari II Surabaya	49
Andi Andong	Profil Gaya Kognitif Dalam Pemecahan Masalah Matematika Divergen	54
Anik Yunani, Abdul Haris Rosyidi	Penggunaan Laboratorium Mini Untuk Menanamkan Konsep Persegipanjang Dan Persegi Pada Siswa Kelas VII SMP Negeri 1 Pacet	61
Asma Johan	Alat Bantu Belajar "Nilai Tempat" Untuk Membantu Pemahaman Konsep Bilangan Pada Siswa SD	70
Bornok Sinaga	Teori Vygotsky Dan Implementasinya Dalam Pembelajaran Matematika (Pentingnya Pemanfaatan Aspek-Aspek Budaya Dalam Pembelajaran Matematika)	79
Dian Purwanto, Siti Khabibah	Pengembangan Lembar Kerja Siswa (LKS) Dengan Komik Pada Materi Luas Persegipanjang Dan Persegi	93
Edy Bambang Irawan	Penelitian Pengembangan Dan Penelitian Perkembangan Tentang Kemampuan Guru Matematika	101
Eko Suntoyo, Masriyah, R. Sulaiman	Pemberian LKS Pada Pembelajaran "Lingkaran" Di SMP Negeri 16 Surabaya	108
Eviyuni Rahmawati, Endah Budi Rahaju	Pengembangan Perangkat Penilaian Proyek Dan Investigasi Dalam Pembelajaran Matematika Materi Pokok Lingkaran Kelas VII-A Di SMP Negeri 1 Taman Sidoarjo	113
Herry Agus Susanto	Ajaran Ki Hajar Dewantara Dalam Pembelajaran	120
Hobri	Deskripsi Hasil Belajar Dan Aktivitas Siswa Smk Dengan Model Pembelajaran Matematika Berorientasi Vocational Skill (Hasil Ujicoba II)	127
Hongki Julie	Penerapan Prinsip Intertwining Dalam Pendidikan Matematika Realistik Untuk Membelajarkan Pecahan Dan Luas Bangun Datar	136

Ika Wahyunie, Mega Teguh Budiarto	Pengembangan Penilaian Unjuk Kerja (Performance Assessment) Dalam Pembelajaran Matematika Pada Materi Bangun Ruang Sisi Lengkung Di Kelas VIII-A SMP Negeri 25 Surabaya	144
La Ili	Deskripsi Aktivitas Siswa Kelas VII SMP Kartika VII-6 Kendari Dengan Setting Kooperatif Dalam Pembelajaran Matematika	152
La Ili	Model Pembelajaran Berbasis Konstruktivisme Dan Implikasinya Dalam Pembelajaran Di Sekolah	159
Latief Sahidin	Tinjauan Definisi Sudut Dalam Membangun Konsep Sudut Pada Jenjang Sekolah Dasar	174
Masriyah	Aplikasi Logika Dalam Jaringan Listrik	184
Masriyah	Penggunaan Logika Dalam Penarikan Kesimpulan	190
Mega Teguh Budiarto	Daya Tillik Ruang Dalam Pembelajaran Geometri Dan Permasalahannya	199
Mega Teguh Budiarto	Abstraksi Siswa SMP Dalam Mengelompokkan Bangun Datar	206
Nining Florida, Abdul Haris Rosyidi	Pengembangan Lembar Kerja Siswa (LKS) Untuk Mendukung Pembelajaran Contextual Teaching And Learning (CTL)	220
Nur Hidayati Laili, Sutinah	Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Cerita Materi Pokok Persamaan Kuadrat Di Kelas IX E SMP N 2 Sugio-Lamongan	227
Nyoman Sridana	Sistem Pelatihan Model Penyusunan Dan Pengembangan Silabus Matematika Yang Berbasis Konstruktivis Bagi Guru Kelas VII	234
Pradnyo Wijayanti	Bagaimana Menyusun Lembar Kegiatan Siswa (LKS) Dengan Pendekatan Konstruktivis	256
Priwahu Hartanti	Penerapan Lesson Study Dalam Pembelajaran Statistika Sebagai Upaya Meningkatkan Hasil Belajar Siswa Kelas 3 Akuntansi 1 SMK Negeri 1 Jember	266
R. Sulaiman	KKM (Kriteria Ketuntasan Minimal) Dalam KTSP (Sebuah Aspek Untuk Memberikan Warna Sekolah)	274
Rita Yulastuti	Operasi Bilangan Pecahan Dengan Batang Cuisenaire	279
Rudianto Artiono	Penerapan Strategi Beach Ball Untuk Mengaktifkan Mahasiswa Dalam Menjawab Pertanyaan Dosen Pada Perkuliahan Geometri Analitik	286
Sunyoto Hadi Prayitno	Efektivitas Pembelajaran Matematika Dengan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Stad Pada Materi Bilangan Pecahan Di Kelas VII SMP Kosgoro Kecamatan Ngusikan Kabupaten Jombang	295
Sunyoto Hadi Prayitno	Pembelajaran Matematika Realistik Untuk Materi Pokok Pengelolaan Data Di Kelas VI SD Negeri Simomulyo Surabaya	305
Sunyoto Hadi Prayitno	Identifikasi Kesulitan Belajar Siswa Kelas VIII SMP Kartika IV-1 Surabaya Materi Pokok Persamaan Garis Lurus Sub Pokok Materi Gradien	316

Susanah	Upaya Meningkatkan Kemampuan Pemahaman Geometri Mahasiswa Dengan Menggunakan Pendekatan Pengajaran Terbalik	325
Susilo Bekti	Sintaks Model Pembelajaran Pencapaian Konsep Pada Mata Kuliah Struktur Aljabar	333
Tatag Yuli Eko Siswono	Level Of Student's Creative Thinking In Classroom Mathematics	344
Theresia Laurens	Aspek-Aspek Metakognisi Siswa Dalam Penyelesaian Masalah Matematika	352
Warli	Kreativitas Anak Impulsif Dan Reflektif	360
Kariyana Nur A. Siti Khabibah	Implementasi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) Pada Materi Pokok Pecahan Di Sekolah Dasar	369
Ismail	Analisis Kesalahan Siswa SMP dalam Menterjemahkan Soal Bentuk Verbal ke dalam Model Matematika	375
Ismail	Pembelajaran Matematika dengan Penekanan Konstruktivis	378
Hartanio	Studi Eksperimen tentang Pembelajaran Berbasis Masalah Kontekstual dengan Prinsip Penemuan Kembali (Studi pada Matakuliah II di Mahasiswa Pendidikan Matematika PGRI Adi Buana Surabaya)	386
Tri Djoko S	Peran Jenis Penelitian Tindakan Kelas (PTK) dalam Inovasi Pembelajaran Matematika	397
Janet	Kemampuan Siswa Sekolah Dasar dalam Membangun Model Matematika	409
Hartanto	Pendekatan Pembelajaran Matematika Berbasis Tingkat Pemahaman Mahasiswa Tentang Limit Fungsi	418
Sutinah, Siti Khabibah	Identifikasi Masalah yang Dihadapi Mahasiswa Jurusan Matematika Angkatan 2006/2007	431
Matematika		
Adatul Mukarromah	Analisis Data Time Series Dengan Pendekatan Metode Radial Basis Function Network	438
Anita T.Kurniawati, Ignr Usadha	Kriteria Osilasi Persamaan Diferensial Tundaan Tingkat Satu Dengan Dua Argumen Tundaan	442
Ari Yuanita,Pradnyo W. Budi Rahadjeng,	Pelabelan Harmonious Pada Graph Star Dan Graph Double Star	448
Arie Wardhono	Penentuan Alternatif Lokasi Gudang Pada Model Jaringan Distribusi Barang Menggunakan Model Transshipment	451
Chusnul Chotimah, Manuharawati	Aliran Fluida Dalam Pemetaan Konformal	459
Hery Tri Sutanto	Analisis Komponen Utama Dan Analisis Faktor Untuk Mengelompokkan Jenis Hama Padi Di Indonesia	467
Hery Tri Sutanto	Menentukan Model Polinomial Terbaik Dengan Menggunakan Metode Marchov Chain Monte Carlo Dan Intrinsik Bayes Factor	474
Joice Ruth Juliana, M. Setijo Winarko	Analisa Bifurkasi Bogdanov-Takens Pada Sistem Dinamik Kuadratik	488

Latief Sahidin	Tinjauan Teori Chaos Pada Persamaan Logistik	496
M. Sjahid Akbar, Asfa Agustina NA	Optimasi Multirespon Dengan Kendala <i>Confidence Regions</i> (Studi Kasus Optimasi Kekuatan <i>Torque</i> Lampu TI Tipe FI 10 Wdi Pt. Panasonic Lighting Indonesia)	504
NI Ketut Tari T, Ignr Usadha	Model Siklus Bisnis Is-Lm Dengan Persamaan Diferensial Tundaan	517
Novanti Panca W, Dwi Juniati	Sifat-Sifat Fiber Pada Graph Voltase	524
Retnani Rahmiati, Sony Sunaryo, I Nyoman Latra	Pemodelan Data Kalibrasi Dengan Regresi <i>Partial Least Square (PLS)</i>	530
Tohari A, Yuni Yamasari	Penggunaan Kurva Ellips Untuk Pengkodean Data	539
Valeriana Lukitosari	Studi Perbandingan Ekpektasi Biaya Total Antara Kasus Backorder Dan Lost Sales Pada Model Persediaan Probabilistik	549
Wibawati	Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Status Gizi Balita Di Kabupaten "X" (Dengan Pendekatan Regresi Logistik Ordinal)	557
Yuni Yamasari, Tohari A.	Sistem "Assistment" Dan Visualisasi Data Penelusuran Siswa Untuk Mendukung Penilaian Siswa Pada Sistem E-Learning	564
F. Pranolo, H. Gunawan	Fourier Series Of Piecewise Linear Functions	572
Valeriana L.	Analisa Sensitivitas Pada Penentuan Kuantitas Pemesanan Dan Total Biaya Variabel Dalam Sistem Pengendalian Persediaan	580
Abadi, Vuri Mahardianti	Kestabilan Solusi Trivial Dari Sistem Bervariasi Pada Medium Mengalir	588
Fransas Abdillah, Abadi	Aplikasi Prinsip Maksimum Pontryagin Pada Masalah Pengontrolan Satelit	597
Dwi Juniati	Grup Topologi dan Aplikasinya	606
Dwi Juniati	Lemma Morse dan Aplikasinya	614
Ketut Budayasa	Flow-Maksimum Biaya-Minimum pada Network	625
Rini Setyaningsih	Implementasi Pendekatan PMRI dalam Pembelajaran Matematika	638
Rini Setyaningsih	Pola Fleksibilitas Peran Guru pada Diskusi yang terjadi dalam pembelajaran dengan pendekatan PMRI	646
Endah Budi Rahayu	Pembelajaran Edutainment sebagai alternatif untuk meningkatkan motivasi belajar siswa	655

KRITERIA OSILASI PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN TINGKAT SATU DENGAN DUA ARGUMEN TUNDAAN

Anita T. Kurniawati
IGNR Usadha

ABSTRAK

Diberikan persamaan diferensial tundaan tingkat satu dengan dua argumen tundaan yang berbentuk:

$$x'(t) + P(t)x(t - \sigma) - Q(t)x(t - \tau) = 0$$

dengan $P(t), Q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ dan σ, τ adalah konstanta tak negatif. Dicari syarat cukup sehingga setiap penyelesaian dari persamaan tersebut berosilasi.

Kata kunci: Persamaan diferensial tundaan, osilasi.

1. Pendahuluan

Pada umumnya suatu sistem dimodelkan secara matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Dalam persamaan diferensial hanya ditentukan oleh keadaan sekarang. Padahal dalam kenyataannya suatu model lebih realistik harus meliputi keadaan sistem pada masa lalu. Misalnya saja pada interaksi populasi[4]. Persamaan diferensial seperti itu dinamakan persamaan diferensial fungsional. Persamaan diferensial fungsional yang paling sederhana adalah persamaan diferensial tundaan atau *retarded*. [3]

Penyelesaian dari persamaan diferensial kadang sulit diperoleh, sehingga dipelajari perilaku atau sifatnya, antara lain osilasi yang akan dibahas dalam makalah ini.

2. Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial fungsional ada dua tipe yaitu persamaan diferensial fungsional tipe *retarded* yang di beberapa literatur disebut *delay differential equations* (persamaan diferensial tundaan) dan tipe *neutral*. Persamaan diferensial tundaan adalah persamaan diferensial yang derivatif tingkat tertinggi fungsi yang tidak diketahui tidak memuat tundaan.

Diberikan bilangan real $\tau \geq 0$ dan $C = C([-r, 0], \mathbb{R})$. C adalah ruang bernorma dengan norma

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|, \quad \text{untuk } \phi \in C.$$

Dapat ditunjukkan bahwa C adalah Ruang Banach.

3. Penyelesaian Berosilasi

Apabila dalam suatu sistem dinamik, penyelesaian suatu persamaan diferensial sulit diperoleh, maka tindakan yang bisa dilakukan adalah dengan mengamati sifat-sifat (perilaku) dari penyelesaian tersebut. Dalam makalah ini akan dibahas salah satu sifat penyelesaian tersebut, yaitu penyelesaian berosilasi.

Suatu fungsi (real) pada suatu interval $[t_0, \infty)$ dikatakan berosilasi jika terdapat barisan bilangan real $\{t_m\} \rightarrow \infty$, untuk $m \rightarrow \infty$ sedemikian sehingga $t_m \in [t_0, \infty)$ dan $x(t_m) = 0$, $m=1, 2, 3, \dots$ [5]

Berikut ini diberikan beberapa lemma yang digunakan dalam mendapatkan kriteria osilasi dari persamaan diferensial tundaan yaitu:

Lemma 3.2

Diasumsikan bahwa $P_i \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+]$ dan $\tau_i \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+]$ untuk $i = 1, \dots, n$. Suatu pertidaksamaan:

$$x'(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)x(t - \tau_i(t)) \leq 0, \quad t \geq t_0$$

mempunyai penyelesaian *eventually* positif jika dan hanya jika persamaan:

$$y'(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)y(t - \tau_i(t)) = 0, \quad t \geq t_0$$

mempunyai penyelesaian *eventually* positif. [2]

Lemma 3.3

Jika diasumsikan bahwa untuk beberapa i ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+n} R_i(s) ds > 0 \quad (1)$$

dan $x(t)$ adalah penyelesaian *eventually* positif dari persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t) + \sum_{i=1}^n R_i(t)x(t - \tau_i) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

maka

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t - \tau_i)}{x(t)} < \infty. \quad [5]$$

Lemma 3.4

Jika persamaan (2) mempunyai penyelesaian *eventually* positif maka

$$\int_t^{t+n} R_i(s) ds < 1, \quad i = 1, \dots, n$$

eventually. [5]

4. Kriteria Penyelesaian Berosilasi

Diberikan persamaan diferensial tundaan dengan bentuk:

$$x'(t) + P(t)x(t - \sigma) - Q(t)x(t - \tau) = 0 \quad (3)$$

dengan $P(t), Q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ dan $\sigma, \tau \in [0, \infty)$.

Persamaan (3) dapat ditulis:

$$x'(t) = f(t, x)$$

dengan $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $f(t, x) = -P(t)x(t - \sigma) + Q(t)x(t - \tau)$. Karena $f(t, x)$ kontinu maka persamaan diferensial (3) mempunyai penyelesaian. Karena persamaan (3) memenuhi kondisi Lipschitz terhadap x , maka penyelesaian tersebut tunggal. Selanjutnya, kriteria osilasi dari persamaan (3) akan diberikan oleh Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Teorema 4.1

Jika diasumsikan bahwa:

(H1) $P, Q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $\sigma, \tau \in [0, \infty)$ dan $\tau \leq \sigma$

(H2) $P(t) \geq Q(t + \tau - \sigma)$ untuk $t \geq t_0 + \sigma - \tau$

(H3) $\int_{-\sigma}^{-\tau} Q(s) ds \leq 1$ untuk $t \geq t_0 + \sigma$

dan misalkan $x(t)$ adalah penyelesaian dari (3) yang *eventually* positif serta dibentuk:

$$z(t) = x(t) - \int_{-\sigma}^{-\tau} Q(s + \tau)x(s) ds, \quad t \geq t_0 + \sigma - \tau \quad (4)$$

maka $z(t)$ adalah fungsi positif yang tak naik (*non increasing*) dan memenuhi pertidaksamaan:

$$z'(t) + [P(t) - Q(t + \tau - \sigma)]z(t - \sigma) \leq 0. \quad (5)$$

Bukti:

Diasumsikan bahwa $t_1 \geq t_0 + \sigma$ sedemikian sehingga $x(t)$ bernilai positif untuk $t \geq t_1 - \tau$. Persamaan (4) diturunkan menghasilkan:

$$z'(t) = x'(t) - Q(t)x(t - \tau) + Q(t - \sigma + \tau)x(t - \sigma) \quad (6)$$

Selanjutnya persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (6), menjadi:

$$z'(t) = [-P(t) + Q(t - \sigma + \tau)]x(t - \sigma) \quad (7)$$

Berdasarkan (H2) dan $x(t - \sigma) > 0$, maka $z'(t) \leq 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $z(t)$ adalah yang tak naik (*non increasing*). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $z(t)$ adalah fungsi positif. Dari persamaan (7) diintegrasikan dari $t - \sigma$ sampai t , sehingga didapat:

$$z(t) - z(t - \sigma) = - \int_{t - \sigma}^t [P(t) - Q(t - \sigma + \tau)] x(t - \sigma) ds$$

Mengingat (H2) dan $x(t) > 0$ diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - z(t - \sigma)) \neq 0$, yang berarti $z(t) \neq 0$, untuk $t \geq t_1 - \tau$. Jadi $z(t) > 0$, untuk $t \geq t_1 - \tau$.

Sedangkan dari persamaan (4) mengakibatkan $z(t) < x(t)$ sehingga $z(t - \sigma) < x(t - \sigma)$. Selanjutnya diperoleh

$$z'(t) + [P(t) - Q(t + \tau - \sigma)]z(t - \sigma) \leq 0. \quad \square$$

Teorema 4.2

Jika diasumsikan bahwa (H1),(H2),(H3) dari **Teorema 4.1** terpenuhi dan $R(t) = P(t) - Q(t + \tau - \sigma)$, serta diasumsikan

(H4) $\int_0^{+\infty} R(s) ds > 0$ untuk $t \geq t_0$ dan beberapa $t_0 > 0$

(H5) $\int_0^{+\infty} R(t) \ln \left(e \int_0^{+\infty} R(s) ds \right) dt = \infty$

maka setiap penyelesaian dari persamaan (3) beresilasi.

Bukti:

Diandaikan terdapat penyelesaian tak beresilasi $x(t)$, yaitu terdapat $t_1 > t_0$ dengan $t_1 - \sigma + \tau \geq t_0$ sedemikian sehingga $x(t) > 0$ atau $x(t) < 0$ untuk $t \geq t_1$. Tanpa mengurangi umumnya bukti, diasumsikan $x(t)$ adalah penyelesaian

yang *eventually* positif, sehingga berdasarkan Teorema 4.1 $z(t)$ adalah fungsi positif tak naik (*non increasing*) dan memenuhi

$$z'(t) + [P(t) - Q(t + \tau - \sigma)]z(t - \sigma) \leq 0.$$

Berdasarkan Lemma 3.2, persamaan $y'(t) + [P(t) - Q(t + \tau - \sigma)]y(t - \sigma) = 0$ mempunyai penyelesaian yang *eventually* positif.

Misalkan $\lambda(t) = \frac{-y'(t)}{y(t)}$. Karena $y(t)$ *eventually* positif dan $y'(t) = -[P(t) - Q(t + \tau - \sigma)]y(t - \sigma) \leq 0$ maka $\lambda(t)$ bernilai tak negatif (*non negative*) dan kontinu, sehingga jika terdapat $t_1 \geq t_0$ maka $y(t_1) > 0$ dan

$$y(t) = y(t_1)e^{-\int_{t_1}^t \lambda(s) ds}.$$

Jika $\lambda(t)$ juga memenuhi bentuk umum dari persamaan karakteristik, maka:

$$\lambda(t) = R(t)e^{\int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds} \quad (8)$$

dengan $R(t) = P(t) - Q(t + \tau - \sigma)$.

$$\text{Untuk } r > 0, \text{ maka } e^r \geq x + \frac{\ln(er)}{r}. \quad (9)$$

Didefinisikan $A(t) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds$, sehingga persamaan (8) menjadi:

$$\lambda(t) = R(t)e^{\frac{A(t)}{A(t)} \int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds} \quad (10)$$

Berdasarkan (9), maka persamaan (10) menjadi:

$$\lambda(t) \geq R(t) \left[\frac{1}{A(t)} \int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds + \frac{\ln e A(t)}{A(t)} \right] \quad (11)$$

Pertidaksamaan (11) dikalikan dengan $A(t)$, sehingga menjadi

$$A(t)\lambda(t) \geq R(t) \int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds + R(t) \ln e A(t) \quad (12)$$

Karena $A(t) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds$, maka persamaan (12) menjadi

$$\lambda(t) \int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds - R(t) \int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds \geq R(t) \ln \left(e \int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds \right) \quad (13)$$

Jika diintegrasikan dari T sampai dengan N menjadi

$$\int_T^N \lambda(t) \left[\int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds \right] dt - \int_T^N R(t) \left[\int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds \right] dt \geq \int_T^N R(t) \left[\ln \left(e \int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds \right) \right] dt \quad 14$$

Dengan mengubah batas integrasi, maka

$$\begin{aligned} \int_T^N R(t) \left[\int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds \right] dt &\geq \int_{-\sigma}^{N-\sigma} \left[\int_{-\sigma}^{+\sigma} R(t) \lambda(s) dt \right] ds \\ &= \int_{-\sigma}^{N-\sigma} \lambda(s) \left[\int_{-\sigma}^{+\sigma} R(t) dt \right] ds \\ &= \int_{-\sigma}^{N-\sigma} \lambda(t) \left[\int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds \right] dt. \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\int_T^N R(t) \left[\int_{-\sigma}^t \lambda(s) ds \right] dt \geq \int_{-\sigma}^{N-\sigma} \lambda(t) \left[\int_{-\sigma}^{+\sigma} R(s) ds \right] dt \quad (15)$$

Dari persamaan (14) dan (15) didapat:

$$\int_{N-\sigma}^N \lambda(t) \left[\int_t^{t+\sigma} R(s) ds \right] dt \geq \int_t^N R(t) \left[\ln \left(e \int_t^{t+\sigma} R(s) ds \right) \right] dt. \quad (16)$$

Karena berdasarkan Lemma 3.4 diketahui bahwa $\int_t^{t+\sigma} R(s) ds < 1$ eventually, maka persamaan (16) menjadi:

$$\int_{N-\sigma}^N \lambda(t) dt \geq \int_t^N R(t) \left[\ln \left(e \int_t^{t+\sigma} R(s) ds \right) \right] dt \quad (17)$$

Ruas kiri dari pertidaksamaan (17) jika diselesaikan menjadi

$$\int_{N-\sigma}^N \frac{-y'(t)}{y(t)} = \ln \frac{y(N-\sigma)}{y(N)} dt \quad (18)$$

Untuk $N \rightarrow \infty$, pertidaksamaan (18) menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{y(t-\sigma)}{y(t)} = \infty.$$

Hal ini kontradiksi dengan Lemma 3.3, yang berarti pengandaian salah. Jadi disimpulkan bahwa setiap penyelesaian (1) beresilasi. \square

Contoh:

Diberikan persamaan

$$x'(t) + P(t)x(t-1) - Q(t)x(t-1) = 0, \quad (19)$$

dengan $P(t) = \frac{1}{e}$, $Q(t) = -\frac{1}{et}$, sehingga $R(t) = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{t} \right)$ dan

$$\int_t^{t+1} \frac{1}{e} \left[1 + \frac{1}{s} \right] ds = \frac{1}{e} [s + \ln s] \Big|_t^{t+1} = \frac{1}{e} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right] > 0, \text{ untuk } t \geq 0.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{e} \left[1 + \frac{1}{t} \right] \ln \left[e \int_t^{t+1} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds \right] dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \int_{t_0}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{t} \right] \ln \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right] dt \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \int_{t_0}^{\infty} \ln \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right] dt = \infty, t_0 > 0. \end{aligned}$$

Berarti asumsi Teorema 4.2 dipenuhi. Dengan demikian setiap penyelesaian dari (19) beresilasi.

5. Kesimpulan

Berdasarkan uraian diatas, syarat cukup supaya setiap penyelesaian beresilasi dari persamaan diferensial tundaan (1) adalah

$\int_0^{\infty} R(t) \ln \left(e \int_t^{t+\sigma} R(s) ds \right) dt = \infty$, dengan $R(t) = P(t) - Q(t + \tau - \sigma)$ serta harus memenuhi asumsi (H1), (H2), (H3), dan (H4).

DAFTAR PUSTAKA

- Belman R. dan Cooke KL.(1963).*Differential Difference Equations*.Academic Press.
- Gyori I. dan Ladas G.(1991).*Oscillation Theory of Delay Differential Equations With Applications*. Clarendon Press. Oxford.
- Hale JK. Dan Verduyn Lunel SM.(1993).*Introduction to Functional Differential Equations*.Springer Verlag.New York.
- Jumani.H.(2007).Penggunaan Persamaan Diferensial Tundaan pada interaksi populasi.tesis.jurusan Matematika ITS.
- Li B.(1996).*Oscillation of first order Delay Differential Equations*.Proc AMER Math Sco.Vol 124.pp 3729-3737.
- Usadha.IGNR.(2000).*Persamaan Diferensial Osilasi dengan Koefisien Fungsi Periodik*.Prosiding Seminar Nasional Matematika.ITS.Surabaya.